

MATEMATICĂ

- clasa a XI-a -

Exerciții și probleme

**ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ
ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**

PREFAȚĂ	3
ELEMENTE DE ALGEBRĂ	5
I. PERMUTĂRI	5
I.1. Permutări. Operații cu permutări	6
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste de evaluare</i>	10
II. MATRICE	12
II.1. Operații cu matrice	12
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste de evaluare</i>	22
III. DETERMINANȚI	23
III.1. Calculul determinanților	24
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste de evaluare</i>	33
III.2. Aplicații ale determinanților în geometria plană	34
IV. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE	38
IV.1. Matrice inversabile	38
IV.2. Ecuatii matriceale	44
IV.3. Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Metoda matriceală și metoda lui Cramer	46
IV.4. Rangul unei matrice	48
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste de evaluare</i>	52
IV.5. Studii de compatibilității sistemelor de ecuații liniare	53
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste de evaluare</i>	56
IV.6. Rezolvarea sistemelor liniare prin metoda lui Gauss	58
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste de evaluare</i>	61
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	63
INDICE DE AUTORI	101
ANALIZĂ MATEMATICĂ	102
I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE	102
I.1. Structura algebrică și de ordine a mulțimii \mathbb{R}	103
I.2. Mulțimi mărginite	105
I.3. Vecinătățile unui punct	106
I.4. Puncte de acumulare	107
II. ȘIRURI DE NUMERE REALE	109
II.1. Câteva tipuri de recurențe	112
II.2. Șiruri monotone	114
II.3. Șiruri mărginite	115
II.4. Limite de șiruri	118
II.5. Criterii de existență a limitei unui șir	120
II.6. Criteriul cleștelui	123
II.7. Câteva limite remarcabile	126
II.8. Teoreme fundamentale în teoria convergenței șirurilor	127
II.9. Numărul e	130

II.10. Relații de recurență	134
II.11. Inegalități și convergență	136
II.12. Operații cu șiruri care au limită	138
II.13. Lema lui Stolz-Cesaro	140
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste de evaluare</i>	143
III. LIMITE DE FUNCȚII	145
III.1. Limita unei funcții într-un punct	146
III.2. Proprietăți ale funcțiilor care au limită	150
III.3. Operații cu limite de funcții	152
III.4. Calculul limitelor de funcții. Cazuri de nedeterminare	154
IV. FUNCȚII CONTINUE	167
IV.1. Funcții continue într-un punct sau pe o mulțime	168
IV.2. Operații cu funcții continue	175
IV.3. Proprietatea valorilor intermediare	179
IV.4. Continuitatea funcțiilor inverse	183
IV.5. Proprietăți de mărginire pentru funcțiile continue	184
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste de evaluare</i>	186
IV.6. Probleme recapitulative	187
V. FUNCȚII DERIVABILE	191
V.1. Derivata unei funcții într-un punct. Derivate laterale	196
V.2. Operații cu funcții derivabile	201
V.3. Derivate de ordinul II	206
V.4. Teorema lui Fermat	209
V.5. Teorema lui Rolle	211
V.6. Șirul lui Rolle	214
V.7. Teorema lui Lagrange	216
V.8. Regulile lui l'Hospital	221
V.9. Probleme recapitulative	223
VI. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR	227
VI.1. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	227
VI.2. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	231
VI.3. Funcții convexe. Inegalități	233
VI.4. Asimptotele funcțiilor reale	236
VI.5. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții	239
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	246
INDICE DE AUTORI	363
BIBLIOGRAFIE	364

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

I. PERMUTĂRI

NOȚIUNI TEORETICE

• **Definiție.** Se numește **permutare de gradul n**, $n \in \mathbb{N}^*$ a mulțimii $A = \{1, 2, \dots, n\}$

orice funcție bijectivă $\sigma : A \rightarrow A$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Mulțimea permutărilor de gradul n se notează S_n . Cardinalul mulțimii S_n este n!

• **Compunerea permutărilor (produsul permutărilor)**

a) Fie $\alpha, \beta \in S_n$. Compunerea permutărilor α, β este permutarea notată $\alpha\beta$, definită prin $(\alpha\beta)(k) = \alpha(\beta(k))$, $\forall k = \overline{1, n}$.

b) Compunerea permutărilor, în general, nu este comutativă.

($\exists \alpha, \beta \in S_n$ astfel încât $\alpha\beta \neq \beta\alpha$)

c) Compunerea permutărilor este asociativă. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in S_n$.

d) Permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ este element neutru la compunere:

$\alpha e = e\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in S_n$.

e) Orice permutare $\alpha \in S_n$ are inversă $\alpha^{-1} \in S_n$ astfel încât $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$.

Dacă $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \dots & \alpha(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$.

• **Signatura unei permutări (semnul unei permutări)**

a) Se numește **inversiune** a permutării α , orice pereche (i, j) cu proprietatea $i < j$ și $\alpha(i) > \alpha(j)$, unde $i, j \in \overline{1, n}$. Numărul de inversiuni se notează $m(\alpha)$.

b) Signatura permutării α este numărul $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{m(\alpha)}$. $\varepsilon(\alpha\beta) = \varepsilon(\alpha) \cdot \varepsilon(\beta)$,

$\forall \alpha, \beta \in S_n$.

• **Transpoziții**

Se numește transpoziție de gradul n o permutare $\delta_{ij} \in S_n$, $\delta_{ij}(k) = \begin{cases} i, & k = j \\ j, & k = i \\ k, & k \neq i, k \neq j \end{cases}$,

$i, j, k = \overline{1, n}$.

Sunt adevărate egalitățile:

a) $\delta_{ij} = \delta_{ji}$; b) $\delta_{ij}^2 = e$; c) $\delta_{ij}^{-1} = \delta_{ij}$; d) Numărul transpozițiilor de gradul n este C_n^2 .

e) Orice permutare se poate scrie ca produs de transpoziții.

I.1. PERMUTĂRI. OPERAȚII CU PERMUTĂRI

- 1. Mulțimea A are n elemente. Cât este gradul unei permutări a acesteia dacă mulțimea S_n are cardinalul:
- a) 120; b) 720; c) 40320; d) 2^{n-1} ?
- 2. Mulțimea S_n a permutărilor mulțimii A are k elemente. Câte elemente are mulțimea A în cazul:
- a) $k = \frac{(n+2)!}{20}$; b) $k = 3(n+4)$?
- 3. Să se calculeze $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^2 , β^2 , $(\alpha\beta)^2$ și $\alpha^2\beta^2$ în cazurile:
- a) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;
- b) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- c) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
- 4. Se consideră permutările $\alpha, \beta \in S_5$: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
- a) Să se verifice dacă au loc egalitățile $\alpha\beta = \beta\alpha$ și $(\alpha\beta)^2 = \beta^2\alpha^2$.
- b) Să se calculeze σ^{-1} , β^{-1} , $(\alpha\beta)^{-1}$, $(\beta\alpha)^{-1}$, $\alpha^{-1}\beta^{-1}$, $\beta^{-1}\alpha^{-1}$.
- 5. Să se calculeze puterile α^2 , α^3 , ..., în cazurile:
- a) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
- 6. Fie $\alpha \in S_n$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha^k = e$.
- 7. Să se determine numărul de inversiuni și signatura permutării α în cazurile:
- a) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
- c) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 8 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;
- e) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 10 & 9 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
- 8. Câte inversiuni au în total elementele mulțimii S_n ?

□ 9. Fie $\varepsilon, \sigma \in S_9$, unde:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & m & 9 & 1 & 3 & n & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & k & 4 & 9 & 1 & p & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $m, n, k, p \in \mathbb{N}$ astfel încât ε să fie permutare pară, iar σ să fie permutare impară.

□ 10. Se consideră permutările $\alpha, \beta \in S_{2n}$ date prin:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze $m(\alpha) + m(\beta)$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\varepsilon(\alpha) = 1$.

c) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\varepsilon(\beta) = -1$.

□ 11. Fie permutarea:

$$\theta \in S_{3n+1}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n+1 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 & 3n+1 & 3n & \dots & 2n+2 & 2n+1 & 2n & \dots & n+1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\varepsilon(\theta) = 1$.

□ 12. Să se scrie ca produs de transpoziții permutările:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

□ 13. Se dă numărul $a = 23415$. Se fac toate permutările cifrelor acestui număr și se ordonează crescător numerele obținute. Să se precizeze:

a) locul ocupat de numerele 31425, 51342 și 54123;

b) suma tuturor numerelor obținute.

□ 14. Se consideră numărul natural $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 42451$.

a) Câte numere distincte se obțin dacă se permută cifrele în toate modurile posibile?

b) Să se calculeze suma numerelor obținute.

□ 15. Se dau permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Să se determine $x, y \in S_5$ care verifică egalitățile $x\alpha = \beta, \beta y = \alpha$.

□ 16. Se dau permutările $\alpha, \beta, \theta \in S_5$, unde:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze $\alpha\beta\theta$, $\alpha^{-1}\beta^{-1}\theta^{-1}$, $(\theta\beta\alpha)^{-1}$.

b) Să se calculeze α^{2007} , β^{2003} , θ^{2010} .

c) Să se rezolve ecuațiile: $\alpha x = \theta$; $\alpha y \beta = \theta$; $\alpha^{100} z \beta^{203} = \theta^{1001}$.

□ 17. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$

□ 18. Fie $\alpha, \beta \in S_6$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine signatura permutărilor α și β .

b) Să se scrie α și β ca produs de transpoziții.

c) Să se rezolve ecuațiile: $\alpha^{10}x = \beta^{16}$; $\beta^{301}y\alpha^{200} = (\alpha\beta)^{50}$.

d) Să se rezolve ecuațiile: $\alpha x = x\alpha$; $\alpha x = x\beta$.

□ 19. Să se determine mulțimea soluțiilor ecuațiilor:

a) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$

b) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

c) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

d) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

e) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

f) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

□ 20. Să se arate că ecuația $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ nu are soluții în mulțimea S_4 .

□ 21. Se dă permutarea $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 7 & 9 & 8 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha^n = e$.

b) Să se arate că ecuația $x^2 = \alpha$ nu are soluție în S_9 .

□ 22. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

b) $x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

c) $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

d) $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

□ 23. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x$;

b) $x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot x^2$.

□ 24. Să se arate că ecuația $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = x^3$ un are soluții în S_5 .

□ 25. Să se rezolve în S_5 ecuația: $x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

□ 26. Să se determine permutările $\alpha, \beta \in S_n$, știind că $\frac{\alpha(1)}{1} = \frac{\alpha(2)}{2} = \dots = \frac{\alpha(n)}{n}$, respectiv

$$\frac{n}{\beta(1)} = \frac{n-1}{\beta(2)} = \dots = \frac{1}{\beta(n)}.$$

□ 27. Fie $\alpha \in S_n$ cu proprietatea că pentru oricare $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$ are loc relația $\alpha(i) + \alpha(j) = i + j$. Să se arate că α este permutarea identică.

□ 28. Să se determine toate permutările $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, astfel încât numerele $1 + \sigma(1)$, $2 + \sigma(2)$, ..., $n + \sigma(n)$ să formeze:

a) o progresie aritmetică;

b) o progresie geometrică.

□ 29. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ în fiecare din cazurile:

a) $1 + \sigma(1) = 2 + \sigma(2) = \dots = n + \sigma(n)$;

b) $1 - \sigma(1) = 2 - \sigma(2) = \dots = n - \sigma(n)$;

c) $1 \cdot \sigma(1) = 2 \cdot \sigma(2) = \dots = n \cdot \sigma(n)$.

□ 30. Fie $\alpha, \beta \in S_n$. Să se arate că dacă are loc una dintre relațiile:

a) $\frac{\alpha(1)}{\beta(1)} = \frac{\alpha(2)}{\beta(2)} = \dots = \frac{\alpha(n)}{\beta(n)}$;

b) $\frac{\alpha(1) + \beta(1)}{1} = \frac{\alpha(2) + \beta(2)}{2} = \dots = \frac{\alpha(n) + \beta(n)}{n}$, atunci $\alpha = \beta$.

□ 31. Se dau numerele strict pozitive $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care următoarele sume au valoarea minimă (maximă):

a) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$; b) $\sum_{i=1}^n a_i a_{\sigma(i)}$; c) $\sum_{i=1}^n \frac{a_{\sigma(i)}}{i}$; d) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_{\sigma(k)}}$; e) $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{\sigma(k)}}$.

- 32. Fie $H \subset S_n, H \neq \emptyset$ cu proprietatea că $\forall \sigma, \theta \in H \Rightarrow \sigma\theta \in H$. Să se arate că:
- a) permutarea identică $e \in H$; b) dacă $\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H$.
- 33. Fie $\sigma \in S_n, n \geq 3$. Dacă $\sigma x = x\sigma, \forall x \in S_n$, atunci $\sigma = e$.
- 34. Să se studieze surjectivitatea funcției $f: S_4 \rightarrow S_4, f(\alpha) = \alpha^4$.
- 35. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, iar p și q divizori pozitivi ai lui n . Să se arate că ecuațiile $\sigma^p = e$ și $\sigma^q = e$ au o singură soluție comună în S_n , dacă și numai dacă p și q sunt prime între ele.

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE EVALUARE

Testul 1

(timp de lucru 40 de minute)

- 1. Se dau permutările $\pi_1, \pi_2 \in S_4, \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- a) Să se scrie inversiunile permutărilor π_1 , respectiv π_2 . (1 p.)
- b) Să se determine $\pi_1\pi_2, \pi_2\pi_1, \pi_1^{-1}\pi_2^{-1}$. (1 p.)
- c) Câte soluții are ecuația $\pi_1^3 x = \pi_2$? Să se determine aceste soluții. (1 p.)
- 2. Fie p numărul soluțiilor ecuației $\alpha x = x\alpha$, unde $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și q numărul inversiunilor permutării α . Stabiliți dacă:
- a) $p + q = 10$; b) $2p - q = 8$; c) $p + 3q = 15$; d) $p = q = 5$. (2 p.)
- 3. Fie numărul natural $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 3721$.
- Să se calculeze suma $s = \sum_{\alpha \in S_4} \overline{a_{\alpha(1)} a_{\alpha(2)} a_{\alpha(3)} a_{\alpha(4)}}$. (2 p.)
- 4. Se consideră permutarea $\sigma \in S_8, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & k & 1 & 8 & p & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- Să se determine $k, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m(\sigma) = -1$. (2 p.)

○ 1. Fie $\alpha, \beta \in S_4$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine cel mai mic număr $m, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\alpha^m = e$, $\beta^n = e$.

(1,5 p.)

b) Să se rezolve ecuațiile: $\alpha^{257}x = \beta^{405}$, $y\alpha^{521} = \beta^{83}$.

(1,5 p.)

○ 2. Să se rezolve în S_4 sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = y \\ x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot y \end{cases}$$

(2 p.)

○ 3. Fie $\alpha \in S_9$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $m(\alpha)$ și $\varepsilon(\alpha^2)$.

(1 p.)

b) Câte soluții are ecuația $x^2 = \alpha$? Dar $x^2 = \alpha^3$?

(1 p.)

○ 4. Să se scrie ca produs de transpoziții permutarea $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(2 p.)

NOȚIUNI TEORETICE

• Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și \mathbb{C} mulțimea numerelor complexe. Se numește matrice de tipul (m, n) cu elemente din \mathbb{C} , orice funcție $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$, $A(i, j) = a_{ij}$.
Notăție $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Se notează $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente în \mathbb{C} .

• Adunarea matricelor

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Suma matricelor A și B este matricea $C = (c_{ij})_{m \times n}$, cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Se notează $C = A + B$.

• Înmulțirea matricelor cu scalari

Produsul matricei $A = (a_{ij})_{m \times n}$ cu scalarul $k \in \mathbb{C}$ este matricea $B = (b_{ij})_{m \times n}$ cu elementele $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

• Dacă $A = (a_{ij})_{m \times n}$, se numește **transpusa** matricei A matricea ${}^tA = (a_{ji})_{n \times m}$.

• Înmulțirea matricelor

Produsul matricelor $A = (a_{ij})_{m \times n}$ și $B = (b_{ij})_{n \times p}$ este o matrice $C = (c_{ik})_{m \times p}$ ale cărei elemente sunt date de egalitățile: $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$, $\forall i = \overline{1, m}$ și $k = \overline{1, p}$.

Produsul matricelor A, B se notează AB sau $A \cdot B$.

Înmulțirea matricelor este asociativă, dar nu este comutativă.

• Matricea unitate I_n este element neutru la înmulțirea matricelor pătratice de ordin n . ($AI_n = I_nA = A, \forall A \in \mathcal{M}_n$)

• Puterea unei matrice pătratice

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se definesc inductiv puterile cu exponent natural:

$$A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^n = A^{n-1} \cdot A, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

• Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, are lor relația $A^2 - (a+d) \cdot A + (ad-bc) \cdot I_2 = O_2$

(relația Hamilton-Cayley).

II.1. OPERAȚII CU MATRICE

□ 1. Să se determine parametrii reali a, b, c, d , pentru care matricea A este nulă:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} b^2 - b & b^2 + b - ab \\ a + b - c & a - d - 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} a^2 + a - 2 & b^2 - a + 1 \\ c^2 - a & d^2 - a \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - ab - 1 & 2a^2 + 3b^2 - 5 \\ 2c^2 + 3cd - 4d^2 - 1 & 3cd - 2c^2 - d^2 \end{pmatrix}.$$

□ 2. Să se determine constantele reale pentru care $\begin{pmatrix} 2a+b & a+b-c-d \\ a+b+d+2c & 2b-a \end{pmatrix} = I_2$

și $\begin{pmatrix} c-d+a+x & c+y \\ d+z & c+d-a \end{pmatrix} = O_2$.

□ 3. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\begin{pmatrix} 2^x + 3^x & 2^x + 2 \\ 2^{2x} & 2^x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2^{x+1} + 3^y & 2^{x-1} + 9^y \\ 3^x + 2^y & 2^2 + 3^y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

□ 4. Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{C}$, astfel încât:

a) $\begin{pmatrix} a+b & 2a-b \\ 2+3a & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & a+2 \end{pmatrix}$;

b) $2 \cdot \begin{pmatrix} a^2-2 & 3 \\ 2a-1 & a+2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2a-2 & a+1 \\ b-1 & 3b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $a \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & a \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

□ 5. Să se determine $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, dacă:

a) $2A + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ 3 & 1 & -i \end{pmatrix}$;

b) $(1+i) \cdot A + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -i \end{pmatrix} + A(1-i) = \begin{pmatrix} 3 & i-1 & -1 \\ 1 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$.

□ 6. Să se determine matricele A , dacă:

a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $(1-i) \cdot A + i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1+i) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□ 7. Să se calculeze:

a) $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ k^3 & k(k+1) & k(k-1) \end{pmatrix}$;

b) $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{k(k+1)} & \frac{1}{4k^2-1} \\ \frac{2^k+1}{3^k} & 2^{-k} \end{pmatrix}$;

c) $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & 2^k \cdot 3^{k+1} & 2^{k+1} \cdot 3^{1-k} \\ 2^k & 3^k & 3^k \cdot 2^{-k} \end{pmatrix}$.

□ 8. Dacă $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, să se calculeze: $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{-2k} & \varepsilon^{4k} \\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^{-k} & \varepsilon^{k+2} \end{pmatrix}$.

□ 9. Să se determine matricele A, B , dacă:

a) $A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ și $2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $5A - 3B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $2A + 5B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $(1+i) \cdot A + B = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$ și $A + (1-i) \cdot B = \begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 1-i & 2-i \end{pmatrix}$.

□ 10. Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se rezolve sistemele:

a)
$$\begin{cases} X + Y + Z = A \\ 2X - Y + 3Z = B \\ 3X + 2Y - 2Z = C \end{cases}$$
;

b)
$$\begin{cases} X + Y + i \cdot Z = A \\ X + i \cdot Y + Z = B \\ i \cdot X + Y + Z = C \end{cases}$$
.

□ 11. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, iar $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o rădăcină de ordinul 3 a unității. Să se rezolve sistemele:

a)
$$\begin{cases} X + Y + Z = A \\ X + \varepsilon Y + \varepsilon^2 Z = B \\ X + \varepsilon^2 Y + \varepsilon Z = C \end{cases}$$
;

b)
$$\begin{cases} X + Y = A \\ X + Z = \varepsilon B \\ Y + Z = \varepsilon^2 C \end{cases}$$
.

□ 12. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 = I_3$.

□ 13. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A \cdot B = B \cdot A$. b) Să se calculeze $(A + B)^2$ și $A^2 + 2AB + B^2$.

□ 14. Să se determine $a, b \in \mathbb{C}$, astfel încât: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^2 + a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot I_2 = O_2$.

□ 15. Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Să se afle $a \in \mathbb{C}$, pentru care $A \cdot B = B \cdot A$.

□ 16. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Să se afle $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât: $A^2 - (x^2 + y^2) \cdot A - xyI_2 = O_2$.

□ 17. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

Să se afle $a, b \in \mathbb{C}$, dacă $A \cdot B = C \cdot D$.

□ 18. Se consideră funcția $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $f(A)$, $f(B)$, în cazurile:

a) $f(X) = X^2 - 2X$;

b) $f(X) = X^3 - X^2 + I_2$;

c) $f(X) = X \cdot (X - I_2) \cdot (X - i \cdot I_2)$;

d) $f(X) = X^n, n \in \mathbb{N}^*$.

□ 19. Se consideră $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze A^2 .

□ 20. Să se calculeze:

a) $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^k & 1 \\ 3^k & 2^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□ 21. Să se arate că, dacă $A = \begin{pmatrix} ac+d & bc \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} ae+f & be \\ e & f \end{pmatrix}$, atunci $A^n \cdot B^p = A^p \cdot A^n$, pentru oricare $n, p \in \mathbb{N}$.

□ 22. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} z & u \\ -\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, u \in \mathbb{C} \right\}$. Să se arate că, dacă $A, B \in \mathcal{M}$, atunci $A + B \in \mathcal{M}$ și $A \cdot B \in \mathcal{M}$.

□ 23. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că ${}^t(AB) = BA$ și ${}^tA \cdot {}^tB = AB$.

□ 24. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Să se arate că:

a) $A \cdot B \cdot A = a \cdot A$;

b) $(B \cdot A)^n = B^n$.

- 25. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i+j = n+1 \\ 0, & i+j \neq n+1 \end{cases}$. Să se calculeze A^2 .
- 26. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\text{Tr}(A) \neq 0$. Să se arate că matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comută cu matricea A , dacă și numai dacă B comută cu A^2 .
- 27. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $\text{Tr}({}^t A \cdot A) = 0$. Să se arate că $A = O_n$.
- 28. Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci:
- a) $\text{Tr}((A + {}^t A) \cdot (B - {}^t B)) = 0$; b) $\text{Tr}((AB)^k) = \text{Tr}((BA)^k)$, $k \in \mathbb{N}$.
- 29. Numerele a, b, c, d sunt în progresie aritmetică. Să se arate că, dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, atunci și numerele $n - m, p - n, q - p$ sunt în progresie aritmetică.
- 30. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că dacă $A \cdot B = B \cdot A$, pentru oricare matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci există $x \in \mathbb{C}$, astfel încât $A = x \cdot I_n$.
- 31. Se consideră matricea $A \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}^*)$. Să se arate că dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ și unul din șirurile $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ este o progresie aritmetică, atunci și celelalte șiruri sunt progresii aritmetice.
- 32. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât:
- a) $A^2 = O_2$; b) $A^2 = I_2$; c) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
- d) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix}$; e) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; f) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
- 33. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât:
- a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$; c) $A^2 = 2A$;
- b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$; d) $A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 3i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- 34. Se consideră $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ și matricea $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$. Să se afle matricea A , în cazurile:
- a) $A + i\bar{A} = O_2$; b) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; c) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \bar{A}$.